1 Introduction et définition

L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On crée un nouvel ensemble en rajoutant un élément i tel que $i^2+1=0$ donc $i^2=-1$.

Remarque : L'élément i ne peut pas se noter $\sqrt{-1}$ car sinon en gardant les règles sur les opérations des radicaux on aurait :

$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ mais aussi $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{1}=1$ ce qui donne à la fois 1 et -1. impossible

Définition
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $a+ib$ avec a et b réels et i tel que $i^2=-1$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des nombres complexes.

Exemple : $1+5i$ est un nombre complexe, $3i$ est aussi un nombre complexe. Tous les réels sont des cas particuliers de nombres complexes. On a $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Définition et propriété :
Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z=a+ib$ avec a et b réels. Cette écriture de z s'appelle ***l'écriture algébrique*** du nombre complexe.
a s'appelle ***partie réelle*** de z ; b s'appelle ***partie imaginaire*** de z. On écrira $\boldsymbol{Re(z)=a}$ et $\boldsymbol{Im(z)=b}$.
Si $a=0$ le nombre complexe ib s'appelle imaginaire pur.

Conséquence : z_1 et z_2 deux nombres complexes.

$$\boxed{z_1=z_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2)\\ Im(z_1) = Im(z_2)\end{cases}}$$

Exemple : $3+4i=a+ib$ avec a et b réels. On peut dire que $a=3$ et $b=4$.

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux nombres complexes. (En pensant à remplacer i^2 par -1).
Exercices :
Ecrire les résultats sous la forme algébrique.

$z_1 = 3(5-i)+i(2-5i)$	$z_2 = (4-3i)^2$	$z_3 = (5+2i)(5-2i)$
$z_1 = \dots\dots\dots$	$z_2 = \dots\dots\dots$	$z_3 = \dots\dots\dots$
$z_1 = \dots\dots\dots$	$z_2 = \dots\dots\dots$	$z_3 = \dots\dots\dots$
$z_1 = \dots\dots\dots$	$z_2 = \dots\dots\dots$	$z_3 = \dots\dots\dots$
$z_1 = \dots\dots\dots$	$z_2 = \dots\dots\dots$	$z_3 = \dots\dots\dots$

Définition : $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$ avec a et b réels.
Le nombre complexe $a-ib$ s'appelle ***le conjugué*** de $a+ib$ et se note $\bar{z}$. On a donc $\bar{z}=a-ib$.

Exemple : $z=3-\dfrac{i}{2}$ donc $\bar{z}=3+\dfrac{i}{2}$.

Utilisation du conjugué pour un quotient :
Mettre le nombre complexe $z_4=\dfrac{5i}{1+i}$ sous la forme algébrique. Pour cela, on utilise le conjugué de $1+i$.
$z_4=\dfrac{5i}{1+i}=\dfrac{5i\boldsymbol{(1-i)}}{(1+i)\boldsymbol{(1-i)}}$ donc $z_4=\dfrac{5i-5i^2}{1-i^2}$ or $i^2=-1$ donc $z_4=\dfrac{5i+5}{1+1}$ donc $z_4=\dfrac{5+5i}{2}=\dfrac{5}{2}+i\dfrac{5}{2}$.

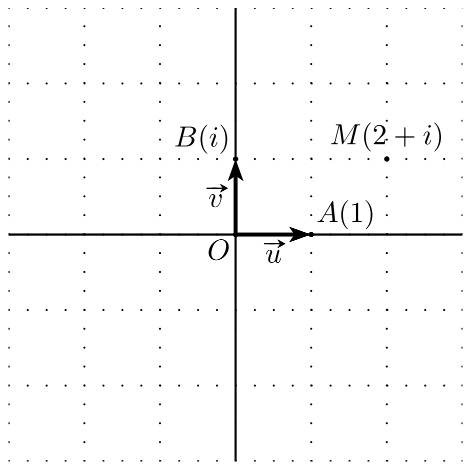
Remarque : L'ordre "<" ou " $\leqslant$ " n'a pas de sens. On **ne peut donc pas** parler de nombre complexe positif ou négatif. (Cela n'a pas de sens). De la même façon, la racine carrée d'un nombre complexe n'existe pas.

3 Représentation des nombres complexes

Soit $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ un repère **orthonormal direct** du plan. A chaque point M du plan correspond de façon unique un couple de coordonnées (a, b) avec a et b réels. A ce couple de réels (a, b), on fait correspondre un seul nombre complexe $a + ib$. Donc à chaque point M du plan correspond un unique nombre complexe $a + ib$.

Réciproquement, à chaque nombre complexe $z = a + ib$ on fait correspondre un seul point M de coordonnées (a, b) du plan.

<u>Définition :</u>
Le nombre complexe z associé au point M s'appelle ***l'affixe*** de M.
Le point M associé au nombre complexe z s'appelle ***le point image*** de z.



Le plan muni du repère $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ orthonormal direct associé aux nombres complexes est appelé <u>le plan complexe</u>.

Le point A a pour affixe 1.
Le point B a pour affixe i.

M est le point image du nombre complexe $2 + i$.

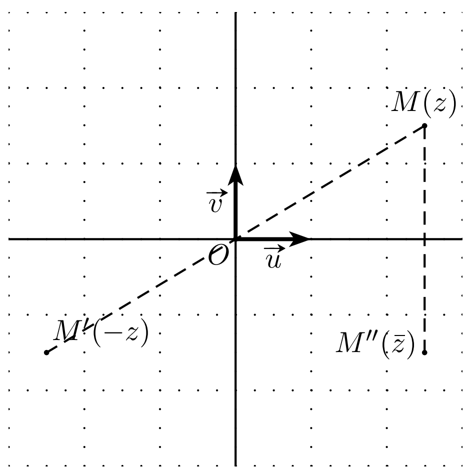
L'axe des abscisses est l'ensemble des points dont l'affixe est réelle.

L'axe des ordonnées est l'ensemble des points dont l'affixe est un imaginaire pur.

<u>Définition : affixe d'un vecteur</u>
A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\boldsymbol{z_B - z_A}$.

Exemple : A est d'affixe $1+2i$ et B est d'affixe $3-3i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3-3i-(1+2i) = 2-5i$.

<u>Représentation graphique de $\bar{z}$ et $-z$ où$z \in \mathbb{C}$</u>



Le point M a pour affixe z.

M' est le point image du nombre complexe $-z$. M' est le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère.

M'' est le point image du nombre complexe $\bar{z}$. M'' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

<u>Propriétés :</u>

1. z ***est réel*** si et seulement si $\boldsymbol{z = \bar{z}}$ ou $\boldsymbol{z - \bar{z} = 0}$.
2. z ***est imaginaire pur*** si et seulement si $\boldsymbol{\bar{z} = -z}$ ou $\boldsymbol{z + \bar{z} = 0}$.
3. **Pour tout** nombre complexe z de la forme $z = a + ib$ avec a et b réels on a : $\boldsymbol{z\bar{z} = a^2 + b^2}$ ($z\bar{z}$ est donc réel.)

4 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$.

Exemples : $(z-3)(iz+1)=0$ $\quad$ $iz+1-i=0$ $\quad$ $(1+3i)z=4+z$ $\quad$ $z+3\bar{z}=(1+i)^2$

Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels :
Cas général : $az^2+bz+c=0$ avec a, b et c réels ($a \neq 0$).
On calcule $\Delta = b^2-4ac$.

1. Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$ l'équation a une seule solution réelle $z_1 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ l'équation a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple :
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $4z^2+3z+1=0$.
$\Delta = 3^2-4\times4\times1 = 9-16=-7$. Δ est négatif.
Il y a donc deux solutions complexes conjuguées qui sont : $z_1 = \dfrac{-3-i\sqrt{7}}{8}$ et $z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{8}$
Exercice :

1. Résoudre l'équation : $z^2+z+1=0$.
2. Déterminer les réels a, b , c tels que $z^3-1=(z-1)(az^2+bz+c)$
3. En déduire la résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3-1=0$.

5 Propriétés du conjugué d'un nombre complexe.

1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ quels que soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.
2. $\overline{z_1\times z_2} = \overline{z_1}\times\overline{z_2}$ quels que soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.
3. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ quel que soit $z \neq 0$ dans $\mathbb{C}$.
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ quels que soient $z_2 \neq 0$ et z_1 dans $\mathbb{C}$.
5. $z\times\bar{z} = a^2+b^2$ quel que soit $z=a+ib$ avec a et b réels.

Exercices :

1. Soint $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $z_1=\sqrt{3}+i$.
   En déduire la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. On donne $z_1 = \dfrac{5+9i}{13-i}$ et $z_2 = \dfrac{5-9i}{13+i}$.
   a) Sans calcul, expliquer pourquoi z_1+z_2 est réel.
   b) Sans calcul, expliquer pourquoi z_1-z_2 est imaginaire pur.
3. $z\in\mathbb{C}$. On pose $Z=z^2-\bar{z}^2$. Sans calcul, dire si Z est réel ou imaginaire pur.

6 Propriétés de figures avec les nombres complexes.

Propriété d'alignement de trois points.
A, B et C trois points du plan d'affixes z_A, z_B et z_C.
A, B et C sont alignés $\iff$ $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ est réel.

Preuve :
A, B C sont alignés $\iff$ Il existe un réel k tel que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ; c'est à dire $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$.
En utilisant les affixes des vecteurs, on a : $z_C - z_B = k(z_A - z_B)$ $\iff$ $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = k$ c'est à dire $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ est réel.

Exemple :
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -2 - i$ et $z_C = 3 + 4i$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Solution :
On calcule : $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{3 + 4i + 2 + i}{1 + 2i + 2 + i}$.
$\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{5 + 5i}{3 + 3i} = \dfrac{5(1 + i)}{3(1 + i)} = \dfrac{5}{3}$ qui est réel.
Donc $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ est réel. Donc les points A, B et C sont alignés.

Propriété de parallélisme de deux droites.
A, B , C et D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\iff$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel.

Propriété : parallélogramme.
A, B , C et D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.
Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\iff$ $z_B - z_A = z_C - z_D$.

Exemple :
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = -1 + 5i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 + 3i$.
Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
Solution :

Propriété : Milieu d'un segment.
A, B deux points du plan d'affixes z_A, z_B.
I milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple :
Les points A, B ont pour affixes respectives $z_A = -3 + 5i$, $z_B = 1 + i$.
Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AB]$.

Solution :
On a $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-3 + 5i + 1 + i}{2} = \dfrac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$.